二重冪型非線形項をもつ Benjamin–Ono 型方程式の進行波解の安定性解析

東京理科大学　大学院理学研究科　数学専攻
國分海斗 (Kaito KOKUBU) *

概要

本講演では, 吸引的 – 吸引的な二重冪型非線形項をもつ Benjamin–Ono 型方程式の進行波解の安定性について考察する. 進行波解の安定性に関する理論はいくつか構築されているが, 本研究では, Grillakis–Shatah–Strauss(1987) に基づき, 作用汎関数の線形化作用素に対する強圧性を導くことにより安定性を証明する.

1　導入

1.1　はじめに

非線形分散型方程式は, 電磁波や水面波など, 様々な波動現象を記述する非線形偏微分方程式であり, 非線形 Schrödinger 方程式や Korteweg–de Vries 方程式などがこれに分類される. これらの方程式は, 波を空間方向に分散させる構造 (分散性) と, 1 点に集中させる構造 (非線形性) をもち, 特に分散性と非線形性が釣り合うとき, いくら時間が経過しても形状が保たれる孤立波解が現れる. 孤立波解に摂動を加えた際に, その解が孤立波解の近くに留まり続けるとき, 孤立波解は安定であるという (正確な定義は後ほど述べる). 孤立波解の安定性については, 1980 年代以降盛んに解析が行われており, 近年では, 非線形項を一般化した場合や連立系など, 様々な設定のもとで研究が行われている.

1.2　問題設定

次の二重冪型非線形項をもつ Benjamin–Ono 型方程式を考える:

$$\partial_t u + \partial_x(|u|^{p-1}u + |u|^{q-1}u) - \partial_x D_x^\sigma u = 0, \quad t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}. \tag{BO}$$

ここで, $u = u(t,x)$ は実数値の未知関数とする. また, $\sigma > 0$ とし, 作用素 D_x^σ は Fourier 変換 $\mathscr{F}$ を用いて $D_x^\sigma \coloneqq \mathscr{F}^{-1}|\xi|^\sigma \mathscr{F}$ と定める. この作用素は, $D_x^\sigma = (-\partial_x^2)^{\sigma/2}$ とも書かれる. なお, 本稿では, $1 < \sigma < 2$ の場合を考える. また, $1 < p < q < \infty$ とする.

* E-mail:1123701@ed.tus.ac.jp

本稿では (BO) の初期値問題に関して以下の仮定を課す.

仮定. $1<\sigma<2$ とする. このとき, 任意の $u_0\in H^{\sigma/2}(\mathbb{R})$ に対して, ある時刻 $T>0$ が存在して, $u(0)=u_0$ なる (BO) の解 $u(t)\in C([0,T),H^{\sigma/2}(\mathbb{R}))$ が一意的に存在する. さらに, $u(t)$ は次の汎関数の値を保存する:

$$
\begin{aligned}
&(\text{エネルギー}) && E(v)=\frac{1}{2}\|D_x^{\sigma/2}v\|_{L^2}^2-\frac{1}{p+1}\|v\|_{L^{p+1}}^{p+1}-\frac{1}{q+1}\|v\|_{L^{q+1}}^{q+1},\\
&(\text{質量}) && M(v)=\frac{1}{2}\|v\|_{L^2}^2.
\end{aligned}
$$

注意. $3/4\le\sigma<2$ のとき, p と q がともに奇数であれば, この仮定は実際に成り立つことが知られている. (Molinet–Tanaka [7] を参照)

1.3 進行波解と基底状態

ここでは, (BO) の進行波解 $\phi(x-ct)$ について詳しく述べる. ここで, $c>0$ は進行波の速さを表す正定数である.

まず, (BO) の進行波解 $\phi(x-ct)$ を構成する関数 ϕ は次の方程式 (定常問題) の非自明解として与えられる:

$$
D_x^\sigma\phi+c\phi-|\phi|^{p-1}\phi-|\phi|^{q-1}\phi=0,\quad x\in\mathbb{R}. \tag{SP$_c$}
$$

この方程式は $u(t,x)=\phi(x-ct)$ を (BO) に代入し, 形式的に微分を計算することで得られる. ここで, $H^{\sigma/2}(\mathbb{R})$ 上の汎関数 S_c を

$$
S_c(v):=E(v)+cM(v)=\frac{1}{2}\|D_x^{\sigma/2}v\|_{L^2}^2+\frac{c}{2}\|v\|_{L^2}^2-\frac{1}{p+1}\|v\|_{L^{p+1}}^{p+1}-\frac{1}{q+1}\|v\|_{L^{q+1}}^{q+1}
$$

と定める. この汎関数は定常問題 (SP$_c$) に対応する作用汎関数とよばれる. このとき, $S_c\in C^2(H^{\sigma/2}(\mathbb{R}),\mathbb{R})$ であり, $v,w\in H^{\sigma/2}(\mathbb{R})$ に対して,

$$
\begin{aligned}
S_c'(v)&=D_x^\sigma v+cv-|v|^{p-1}v-|v|^{q-1}v,\\
S_c'(v)w&=D_x^\sigma w+cw-p|v|^{p-1}w-q|v|^{q-1}w
\end{aligned}
$$

となる. ただし, 汎関数に対する微分は Fréchet 微分である (以下も同様). 特に, $v\in H^{\sigma/2}(\mathbb{R})$ に対して, v が (SP$_c$) の解であることと, $S_c'(v)=0$ が成り立つことは同値である.

本研究では, 定常問題 (SP$_c$) の特殊解の 1 つである**基底状態**によって構成された進行波解の安定性を考察する. まず, 基底状態の定義を述べる.

定義. 定常問題 (SP$_c$) の非自明解 $\phi_c\in H^{\sigma/2}(\mathbb{R})$ が,

$$
S_c(\phi_c)=\inf\{S_c(v):v\in H^{\sigma/2}(\mathbb{R})\setminus\{0\},\ S_c'(v)=0\}
$$

を満たすとき, ϕ_c を (SP$_c$) の基底状態という.

基底状態の存在性については, 本研究とは別に考察すべき問題である. 本稿で考える定常問題 (SP$_c$) については, $0<\sigma<2$ のとき, 任意の $c>0$ に対して, $H^{\sigma+1}(\mathbb{R})$ に属する正値偶

関数の基底状態の存在性がわかっている. さらに, (SP_c) の基底状態 ϕ_c は, (SP_c) に対応する Nehari 汎関数

$$K_c(v) \coloneqq \langle S_c'(v), v\rangle = \|D_x^{\sigma/2}v\|_{L^2}^2 + c\|v\|_{L^2}^2 - \|v\|_{L^{p+1}}^{p+1} - \|v\|_{L^{q+1}}^{q+1},\ v \in H^{\sigma/2}(\mathbb{R})$$

を用いて, 次のように変分的に特徴付けられる:

$$S_c(\phi_c) = \inf\{S_c(v) : v \in H^{\sigma/2}(\mathbb{R}) \setminus \{0\},\ K_c(v) = 0\}.$$

定常問題 (SP_c) の基底状態に関する詳細は, [6] を参照されたい.

1.4 進行波解の安定性

ここでは, (BO) の進行波解の安定性の定義を述べる. まず, $r > 0$ と $v \in H^{\sigma/2}(\mathbb{R})$ に対して,

$$U_r(v) \coloneqq \left\{u \in H^{\sigma/2}(\mathbb{R}) : \inf_{y\in\mathbb{R}} \|v - u(\cdot - y)\|_{H^{\sigma/2}} < r\right\}$$

とおく. ただし, $\|v\|_{H^{\sigma/2}}^2 = \|D_x^{\sigma/2}v\|_{L^2}^2 + \|v\|_{L^2}^2$ とする. この集合は, (BO) の解が平行移動に関して不変であることを加味した v の近傍である.

定義. 以下の性質が成り立つとき, (BO) の進行波解 $\phi(x - ct)$ は**安定** (軌道安定) であるという:

> 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ が存在して, $u_0 \in U_\delta(\phi)$ ならば, $u(0) = u_0$ を満たす (BO) の解 $u(t)$ が時間大域的に存在し, 任意の時刻 $t \geq 0$ に対して, $u(t) \in U_\varepsilon(\phi)$ が成り立つ.

また, 進行波解 $\phi(x - ct)$ が**不安定**であるとは, 進行波解 $\phi(x - ct)$ が上の意味で安定でないことをいう.

1.5 先行研究

まず, 単純冪型非線形項をもつ Benjamin–Ono 型方程式

$$\partial_t u + \partial_x(|u|^{p-1}u) - \partial_x D_x^\sigma u = 0, \quad t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R} \tag{sBO}$$

の進行波解 $\psi_c(x - ct)$ について述べる[1]. ここで, $1 < \sigma < 2$, $1 < p < \infty$ とし, $c > 0$ に対して ψ_c は次の定常問題の一意的な正値偶関数の基底状態とする[2]:

$$D_x^\sigma \psi + c\psi - |\psi|^{p-1}\psi = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

このとき, 進行波解 $\psi_c(x - ct)$ は, $p < 2\sigma + 1$ ならば安定であり, $p > 2\sigma + 1$ ならば不安定であることが, Bona–Souganidis–Strauss [1] の抽象論により得られる. なお, p の条件に現れる指数 $2\sigma + 1$ は Benjamin–Ono 型方程式に対する L^2-臨界指数である.

1) (sBO) についても必要に応じて初期値問題の $H^{\sigma/2}(\mathbb{R})$ 上での局所適切性を仮定する.

2) 基底状態の一意性は Frank–Lenzmann [2] による.

次に, (BO) と同様の二重冪型非線形項をもつ非線形 Schrödinger 方程式

$$i\partial_t u + \Delta u + |u|^{p-1}u + |u|^{q-1}u = 0, \quad t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^N$$

の定在波解 $e^{i\omega t}\phi_\omega(x)$ の安定性に関する先行研究を述べる[3).] $1 < p < 1 + 4/N$ とすると, $\omega > 0$ が十分小さければ, 定在波解 $e^{i\omega t}\phi_\omega(x)$ は安定であることが, $N = 1$ の場合は Ohta [8], $N \geq 3$ の場合は Fukuizumi [3] によってそれぞれ得られている. なお, 指数 $1 + 4/N$ は非線形 Schrödinger 方程式に対する L^2-臨界指数である.

2　主定理とその十分条件

この節では, 本研究で得られた結果とその十分条件について述べる.

定理 1 (K. [5])**.** $1 < \sigma < 2$, $1 < p < q < \infty$, $p < 2\sigma + 1$ とする. また, 各 $c > 0$ に対して, ϕ_c は定常問題 (SP_c) の正値偶関数の基底状態とする. このとき, ある $c^* \in (0, \infty)$ が存在して, 任意の $c \in (0, c^*)$ に対して, (BO) の進行波解 $\phi_c(x - ct)$ は安定である.

定理 1 は, Grillakis–Shatah–Strauss [4] の議論に従って証明される. 次の命題は, 定理 1 の十分条件である.

命題 2. $1 < \sigma < 2$, $1 < p < q < \infty$, $p < 2\sigma + 1$ とする. また, 各 $c > 0$ に対して, ϕ_c は定常問題 (SP_c) の正値偶関数の基底状態とする. このとき, ある $c^* \in (0, \infty)$ が存在して, 任意の $c \in (0, c^*)$ に対して, 以下の性質を満たす定数 $C_0 > 0$ と $\varepsilon_0 > 0$ が存在する:

$M(u) = M(\phi_c)$ なるすべての $u \in U_{\varepsilon_0}(\phi_c)$ に対して,

$$E(u) - E(\phi_c) \geq C_0 \|u - \phi_c(\cdot - y)\|_{H^{\sigma/2}}^2$$

が成り立つ.

定理 1 は, 命題 2 を用いて背理法によって示される. その際に, (BO) の解の連続性および, エネルギー E と質量 M の保存則が必要となる. 詳しい証明は, [4, Theorem 3.5] を参照されたい.

次に命題 2 の十分条件を述べる.

命題 3. $1 < \sigma < 2$, $1 < p < q < \infty$, $p < 2\sigma + 1$ とする. また, 各 $c > 0$ に対して, ϕ_c は定常問題 (SP_c) の正値偶関数の基底状態とする. このとき, ある $c^* \in (0, \infty)$ が存在して, 任意の $c \in (0, c^*)$ に対して, 以下の性質を満たす定数 $C_1 > 0$ が存在する:

$(v, \phi_c)_{L^2} = (v, \partial_x \phi_c)_{L^2} = 0$ なるすべての $v \in H^{\sigma/2}(\mathbb{R})$ に対して,

$$\langle S_c''(v)(\phi_c)v, v\rangle \geq C_1 \|v\|_{H^{\sigma/2}}^2$$

が成り立つ.

命題 3 を用いた命題 2 の証明は [5] を参照されたい.

以上の議論から, 主定理の証明は命題 3 を示すことに帰着される.

---

3)　関数 ϕ_ω は $\sigma = 2$ としたときの (SP_c) に対する正値偶関数の基底状態とする. また, c は ω に置き換えている.

3　命題 3 の証明の概略

まず, 定常問題 (SP_c) の解 ϕ に対して,

$$\phi(x) = c^{1/(p-1)}\tilde{\phi}(c^{1/\sigma}x) \tag{3.1}$$

なるスケーリングを施すと, 関数 $\tilde{\phi}$ は次の定常問題の解となる:

$$D_x^\sigma\tilde{\phi} + \tilde{\phi} - |\tilde{\phi}|^{p-1}\tilde{\phi} - c^\alpha|\tilde{\phi}|^{q-1}\tilde{\phi} = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

ここで, $\alpha \coloneqq (q-p)/(p-1) > 0$ とおいた. このとき, 形式的に $c \to +0$ とすれば, 次の単純冪型非線形項をもつ定常問題が現れる:

$$D_x^\sigma\psi + \psi - |\psi|^{p-1}\psi = 0, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{sSP_1}$$

定常問題 (sSP_1) については, 一意的な正値偶関数の基底状態の存在性が知られている (Frank–Lenzmann [2]). また, (SP_c) の正値偶関数の基底状態は, 次の意味で (sSP_1) の基底状態に収束することがわかる.

補題 4. $1 < \sigma < 2$, $1 < p < q < \infty$ とする. また, 各 $c > 0$ に対して, ϕ_c は定常問題 (SP_c) の正値偶関数の基底状態とし, $\tilde{\phi}_c$ は ϕ_c に (3.1) のスケーリングを施して得られる関数とする. さらに, ψ_1 は定常問題 (sSP_1) の一意的な正値偶関数の基底状態とする. このとき, $c \to +0$ とすると $\tilde{\phi}_c$ は $H^{\sigma/2}(\mathbb{R})$ 上で ψ_1 に強収束する.

また, 定常問題 (sSP_1) の基底状態に関する性質はよく調べられており, その性質を用いることで, 次の補題を示すことができる:

補題 5. $1 < \sigma < 2$, $1 < p < 2\sigma + 1$ とする. また, ψ_1 は定常問題 (sSP_1) の正値偶関数の基底状態とする. このとき, 次の性質を満たす定数 $C_2 > 0$ が存在する:

$(v, \psi_1)_{L^2} = (v, \partial_x\psi_1)_{L^2} = 0$ なるすべての $v \in H^{\sigma/2}(\mathbb{R})$ に対して,

$$\langle (S_1^0)''(\psi_1)v, v\rangle \geq C_2\|v\|_{H^{\sigma/2}}^2$$

が成り立つ.

ここで, S_1^0 は 定常問題 (sSP_1) に対応する作用汎関数であり, 以下のように定められる:

$$S_1^0(v) \coloneqq \frac{1}{2}\|D_x^\sigma v\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\|v\|_{L^2}^2 - \frac{1}{p+1}\|v\|_{L^{p+1}}^{p+1}.$$

命題 3 は, 補題 4 で得られる (SP_c) の基底状態の収束性と補題 5 で得られる性質から, 近似の議論を行うことで証明される. 詳しい証明は [5] を参照されたい.

参考文献

[1] J. L. Bona, P. E. Souganidis, and W. A. Strauss, *Stability and instability of solitary waves of Korteweg-de Vries type*, Proc. Roy. Soc. London Ser. A **411** (1987), no. 1841, 395–412.

[2] R. L. Frank and E. Lenzmann, *Uniqueness of non-linear ground states for fractional Laplacians in* $\mathbb{R}$, Acta Math. **210** (2013), no. 2, 261–318.

[3] R. Fukuizumi, *Remarks on the stable standing waves for nonlinear Schrödinger equations with double power nonlinearity*, Adv. Math. Sci. Appl. **13** (2003), no. 2, 549–564.

[4] M. Grillakis, J. Shatah, and W. Strauss, *Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry. I*, J. Funct. Anal. **74** (1987), no. 1, 160–197.

[5] K. Kokubu, *Stability of travelling waves to benjamin-ono type equations with double power nonlinearities*, arXiv:2407.00321.

[6] K. Kokubu, *On solitary wave solutions to dispersive equations with double power nonlinearities*, Kodai Math. J. **47** (2024), no. 3, 301–322.

[7] L. Molinet and T. Tanaka, *Improved bilinear Strichartz estimates with application to the well-posedness of periodic generalized KdV type equations*, preprint, arXiv:2207.08725.

[8] M. Ohta, *Stability and instability of standing waves for one-dimensional nonlinear Schrödinger equations with double power nonlinearity*, Kodai Math. J. **18** (1995), no. 1, 68–74.